22　曲線と直線

184

(1)

円 C の中心は線分 AB の中点と一致する。

したがって，その座標は$\left(\dfrac{\left(5-2\sqrt{2}\right)+\left(5+2\sqrt{2}\right)}{2},\ \dfrac{\left(1+2\sqrt{2}\right)+\left(1-2\sqrt{2}\right)}{2}\right)=(5,\ 1)$

また，これより，円 C の半径の 2 乗すなわち点 A と円の中心の距離の 2 乗は

$\left\{\left(5-2\sqrt{2}\right)-5\right\}^2+\left\{\left(1+2\sqrt{2}\right)-1\right\}^2=16$

よって，円 C の方程式は$(x-5)^2+(y-1)^2=16$

(2)

解法 1

円が x 軸と y 軸の両方に接するとき，その中心は $y=x$ または $y=-x$ 上にある。

したがって，考えられる中心の座標は

連立方程式$\begin{cases} y=x \\ (x-5)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$　または　連立方程式$\begin{cases} y=-x \\ (x-5)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$

の解である。

連立方程式$\begin{cases} y=x \\ (x-5)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$の解

$$\begin{cases} y=x \\ (x-5)^2+(y-1)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ (x-5)^2+(x-1)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2(x-1)(x-5)=0 \end{cases}$$

$\therefore (x,\ y)=(1,\ 1),\ (5,\ 5)$

連立方程式$\begin{cases} y=-x \\ (x-5)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$の解

$$\begin{cases} y=-x \\ (x-5)^2+(y-1)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ (x-5)^2+(-x-1)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2(x-2)^2+2=0 \end{cases}$$

ところが，$2(x-2)^2+2>0$

よって，解なし

以上より，円 C 上に中心をもち，x 軸と y 軸の両方に接する円の方程式は

$(x-5)^2+(y-5)^2=25,\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$

解法 2

円 C は $x^2+y^2=16$ を x 軸方向に 5，y 軸方向に 1 だけ平行移動した円である。

また，$x^2+y^2=16$ 上の点の座標は，x 軸方向とのなす角を θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とすると，$(4\cos\theta, 4\sin\theta)$ と表される。

よって，円 C 上の点の座標は $(4\cos\theta+5,\ 4\sin\theta+1)$ ・・・① と表される。

したがって，円 C 上に中心をもち，x 軸と y 軸の両方に接する円は，

$|4\cos\theta+5|=|4\sin\theta+1|$ すなわち $4\cos\theta+5=\pm(4\sin\theta+1)$ を満たす。

$4\cos\theta+5=4\sin\theta+1$ のとき

$4(\sin\theta-\cos\theta+1)=0$ $\therefore \sin\theta-\cos\theta=-1$

これと $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ すなわち $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ より，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi$ $\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2},\ \pi$ ・・・②

①，②より，円の中心は $(5,\ 5),\ (1,\ 1)$

よって，円の方程式は $(x-5)^2+(y-5)^2=25,\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$

$4\cos\theta+5=-(4\sin\theta+1)$ のとき

$4\left(\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{3}{2}\right)=0$ $\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{3}{2}$

ところが，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\dfrac{3}{2}<-\sqrt{2} \leq \sin\theta+\cos\theta \leq \sqrt{2}$

よって，不適

以上より，求める円の方程式は $(x-5)^2+(y-5)^2=25,\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$

185

(1)

2 円の半径は，それぞれ 2 と r，

また，中心間の距離は $\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5$

よって，2 つの円が共有点をもたないための必要十分条件は $5<|r-2|$ または $5>r+2$

$5<|r-2|$ より，$r-2<-5$ または $r-2>5$ $\therefore r>7$ $(\because r>0)$

$5>r+2$ より，$0<r<3$

よって，r の必要十分条件は $0<r<3$ または $7<r$

(2)

2 円の共有点は連立方程式 $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4 \\ (x-4)^2+(y-6)^2=16\end{cases}$ の解だから，

$(x-1)^2+(y-2)^2-4+k\{(x-4)+(y-6)^2-16\}=0$（$k$ は実数）を満たす。

すなわち$(x-1)^2+(y-2)^2-4+k\{(x-4)^2+(y-6)^2-16\}=0$ 上の点である。
これが直線の方程式，すなわち 1 次方程式であるための必要十分条件は$k=-1$
よって，求める直線の方程式は$6x+8y=35$

(3)

(2)と同様にして，$(x-1)^2+(y-2)^2-4+l\{(x-4)^2+(y-6)^2-36\}=0$（$l$ を実数）とおくと，
この方程式は 2 円の交点の座標を解にもつ。これがさらに$(x,\ y)=(0,\ 0)$を解にもてば，
求める円の方程式を満す。そこで，この式に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入し，l を求めると，

$1+16l=0 \quad \therefore l=-\dfrac{1}{16}$

したがって，条件を満たす方程式は$(x-1)^2+(y-2)^2-4-\dfrac{1}{16}\{(x-4)^2+(y-6)^2-36\}=0$

両辺に 16 を掛けて整理すると，$15\left(x^2-\dfrac{8}{5}x+y^2-\dfrac{52}{15}y\right)=0$

ゆえに，求める円の方程式は$x^2-\dfrac{8}{5}x+y^2-\dfrac{52}{15}y=0$

186

(1)

点$(0,\ k)$を通る傾き 1 の直線の方程式は$y=x+k$ すなわち$x-y+k=0$
これが円C と異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，この直線の円C の中心からの距離が円C の半径より小さいことである。

よって，$\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<1$を満たす$k$ の値の範囲を求めればよい。

$\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<1$より，$|k-1|<\sqrt{2}$　すなわち$-\sqrt{2}<k-1<\sqrt{2}$　$\therefore 1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$

(2)

内接する正三角形を△APQ，円C の中心を O とすると，
同一弧の中心角と円周角の関係より，$\angle \mathrm{POQ}=2\angle \mathrm{PAQ}=120°$
O から辺 PQ に下ろした垂線の長さ，すなわち O と PQ の距離は，△OPQ が OP＝OQ の二等辺三角形であることから，二等辺三角形の性質より，$\mathrm{OP}\cos 60°=\dfrac{1}{2}$

また，O と辺 PQ の距離は(1)より，$\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

よって，$\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$ より，$|k-1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ すなわち $k-1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに，$k=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

187

直線の C_1 との接点を座標を $(p,\ q)$ とすると，$p^2+q^2=4$ ・・・①
また，直線の方程式は $px+qy=4$ すなわち $px+qy-4=0$ ・・・②

この直線の C_2 の中心からの距離は 1 だから，$\dfrac{|4p+0\cdot q-4|}{\sqrt{p^2+q^2}}=1$

これと①より，$|4p-4|=2$ すなわち $4p-4=\pm 2$ $\therefore p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

$p=\dfrac{1}{2}$ のとき

①より，$q^2=\dfrac{15}{4}$ $\therefore q=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

よって，$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$ ・・・③

$p=\dfrac{3}{2}$ のとき

①より，$q^2=\dfrac{7}{4}$ $\therefore q=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

よって，$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ ・・・④

③，④を②に代入すると，$\dfrac{1}{2}x\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}y-4=0$，$\dfrac{3}{2}x\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}y-4=0$

両辺を 2 倍し，整理することにより，求める直線の方程式は
$x\pm\sqrt{15}y=8,\ 3x\pm\sqrt{7}y=8$

188

C_t の方程式を $x,\ y$ それぞれについて平方完成し，整理すると，$(x-t)^2+(y-2t)^2=t^2$

したがって，円 C_t の中心 $(t,\ 2t)$ からの距離が t であるような直線の方程式を求めればよい。

そこで，求める直線の方程式を $ax+by+c=0$ とすると，

円 C_t の中心 $(t,\ 2t)$ からの距離が t だから，$\dfrac{|at+2bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=t$ より，$|(a+2b)t+c|=\sqrt{a^2+b^2}\,t$

両辺を 2 乗し，t について整理すると，$b(4a+3b)t^2+2(a+2b)ct+c^2=0$

これが任意の正の実数 t に対して成り立つから，

$a,\ b,\ c$ は連立方程式 $\begin{cases} b(4a+3b)=0 \\ (a+2b)c=0 \\ c^2=0 \end{cases}$ の解である。

$c^2=0$ より，$c=0$

これより，$(a+2b)c=0$ が成り立つ。

また，$b(4a+3b)=0$ より，$b=0$ または $4a+3b=0$

よって，$a,\ b,\ c$ が満たすべき条件は（$b=0$ かつ $c=0$）または（$4a+3b=0$ かつ $c=0$）

したがって，$ax+by+c=0$ は,

$b=0$ かつ $c=0$ のとき

$ax=0$

これと，a は任意の実数であることから，$x=0$

$4a+3b=0$ かつ $c=0$ のとき

$a=-\dfrac{3}{4}b$ より，$b\left(-\dfrac{3}{4}x+y\right)=0$

ここで，$b=0$ とすると，$a=b=c=0$ となり，不適

よって，$b\neq 0$ より，$-\dfrac{3}{4}x+y=0$　すなわち $y=\dfrac{3}{4}x$

以上より，$x=0$，$y=\dfrac{3}{4}x$

189

(1)

2 円の中心間の距離が 2 で，半径は同じ r だから，

2 円が外接するならば $2=r+r$　$\therefore r=1$

2 円が内接するならば $2=|r-r|$　ところが右辺は 0 となり不適

よって，$r=1$

(2)

A, B, C を中心とする円をそれぞれ $C_{\mathrm{A}}, C_{\mathrm{B}}, C_{\mathrm{C}}$ とすると，

C_{A} と C_{C} の中心間の距離は 2，半径の和は 2

中心間の距離と半径の和が等しいから，C_{A} と C_{C} は外接する。

同様に，C_{B} と C_{C} も外接する。

(3)

直線 l の方程式を $ax+by+c=0$ とすると，円の中心と l の距離が s だから，

$$\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|\sqrt{3}b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=s$$

$|a+c|=|-a+c|$ より，$a+c=-a+c$ または $a+c=a-c$

よって，$a=0$ または $c=0$

$|a+c|=|\sqrt{3}b+c|$ より，$a+c=\sqrt{3}b+c$ または $a+c=-\sqrt{3}b-c$

$a=0$ のとき

$c=\sqrt{3}b+c$ または $c=-\sqrt{3}b-c$　よって，$b=0$ または $c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

$b=0$ のとき

$c=0$ となり，$a=b=c=0$　よって，不適

$c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$ のとき

$by-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$ より，$b\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$b=0$ とすると，$a=b=c=0$ となり不適だから，$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$　$\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また，$s=\dfrac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right|}{|b|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$c=0$ のとき

$a=\sqrt{3}b$ または $a=-\sqrt{3}b$

$a=\sqrt{3}b$ のとき

$\sqrt{3}bx+by=0$ より，$b\left(\sqrt{3}x+y\right)=0$

$b=0$ とすると，$a=b=c=0$ となり不適だから，$\sqrt{3}x+y=0$　$\therefore y=-\sqrt{3}x$

また，$s=\dfrac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{3}b\right|}{|2b|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a=-\sqrt{3}b$ のとき

同様にして，$y=\sqrt{3}x$，$s=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

以上より，

$s=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　l ： $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y=-\sqrt{3}x$，$y=\sqrt{3}x$

190

(1)

C_3 が C_1 に内接するから，2 円の中心間の距離と半径の関係は $\sqrt{a^2+b^2}=2-t$ $(\because t<2)$

両辺を 2 乗し，整理すると，$a^2+b^2=t^2-4t+4$　・・・①

C_3 が C_2 に外接するから，2 円の中心間の距離と半径の関係は $\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$

両辺を 2 乗し，整理すると，$a^2+b^2-2a=t^2+2t$　・・・②

①－②より，$2a=-6t+4$　$\therefore a=-3t+2$

これを①に代入すると，$b^2=-8t^2+8t=-8t(t-1)>0$　$\therefore 0<t<1$

また，$b>0$ より，$b=\sqrt{-8t^2+8t}$

以上より，$(a,\ b)=\left(-3t+2,\ \sqrt{-8t^2+8t}\right)$，$0<t<1$

(2)

$$b=\sqrt{-8t^2+8t}=\sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$$

よって，b は $t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

191

解法 1

(1)

$x^2=1-y^2$ と $y=ax^2+b$ より，$y=a(1-y^2)+b$　$\therefore ay^2+y-a-b=0$

ただし，$x^2=1-y^2\geq 0$ より，$-1\leq y\leq 1$

ここで，$f(y)=ay^2+y-a-b$ とおくと，共有点が存在するための必要十分条件は

$f(y)=0$ の解の範囲が $-1\leq y\leq 1$ を満たすことである。

また，$x^2=1-y^2$ より，$y=\pm 1$ に対し $x=0$ のみが，$-1<y<1$ においてはある 1 つの y の値に対し 2 つの x の値が存在する。

したがって，$m=2$ となるのは，

$f(y)=0$ の解が $y=\pm 1$ または $-1<y<1$ において重解をもつまたは $f(1)\cdot f(-1)<0$ となるの 3 つの場合が考えられる。

(i)　$f(y)=0$ の解が $y=\pm 1$ のとき

$f(1)=1-b=0$ より，$b=1$

$f(-1)=-1-b=0$ より，$b=-1$

よって，$f(1)=0$ と $f(-1)=0$ は同時に成り立たない。

ゆえに，$f(y)=0$ の解が $y=\pm 1$ となることはない。

(ii)　$-1<y<1$ において重解をもつ

判別式を D とすると，$D=0$，$D=1+4a(a+b)$ より，$1+4a(a+b)=0$

$\therefore b=-a-\dfrac{1}{4a}$　・・・①

重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=-\dfrac{1}{a}$　$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{2a}$

これと，$-1<\alpha<1$ より，$-1<-\dfrac{1}{2a}<1$　$\therefore -1<\dfrac{1}{2a}<1$

$a>0$ だから，$0<\dfrac{1}{2a}<1$　$\therefore a>\dfrac{1}{2}$　・・・②

①かつ②より，$b=-a-\dfrac{1}{4a}$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$　・・・③

(iii)　$f(1)\cdot f(-1)<0$

$f(1)\cdot f(-1)=(1-b)(-1-b)=(b-1)(b+1)<0$ より，$-1<b<1$　・・・④

よって，③または④　すなわち（$b=-a-\dfrac{1}{4a}$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$）または $-1<b<1$

(2)

(1)と同様にして考えると，$m=3$ となるのは，

$f(y)=0$ の解の 1 つが $y=1$ でもう 1 つの解の範囲が $-1<y<1$ のとき

または解の 1 つが $y=-1$ でもう 1 つの解の範囲が $-1<y<1$ のときである。

(i) 1 つの解が $y=1$ でもう 1 つの解の範囲が $-1<y<1$ のとき

$f(1)=1-b=0$ より，$b=1$

また，$f(y)=0$ のもう 1 つの解を β $(-1<\beta<1)$ とすると，

解と係数の関係より，$1+\beta=-\dfrac{1}{a}$ $\quad\therefore \beta=-1-\dfrac{1}{a}$

ところが，$a>0$ より，$\beta<-1$ となり，$-1<\beta<1$ を満たさない。

よって，不適

(ii) 1 つの解が $y=-1$ でもう 1 つの解の範囲が $-1<y<1$ のとき

$f(-1)=-1-b=0$ より，$b=-1$

また，$f(y)=0$ のもう 1 つの解を γ $(-1<\gamma<1)$ とすると，

解と係数の関係より，$-1+\gamma=-\dfrac{1}{a}$ $\quad\therefore \gamma=1-\dfrac{1}{a}$

$-1<\gamma<1$ より，$-1<1-\dfrac{1}{a}<1$ $\quad\therefore a>\dfrac{1}{2}$ $\quad$ これは $a>0$ を満たす。

よって，$a>\dfrac{1}{2}$ かつ $b=-1$

(3)

(1)と同様にして考えると，$m=4$ となるのは，

$f(y)=0$ が $-1<y<1$ の範囲に異なる 2 実数解をもつときである。

$f(y)=ay^2+y-a-b=a\left(y+\dfrac{1}{2a}\right)^2-a-\dfrac{1}{4a}-b$ より，

軸 $y=-\dfrac{1}{2a}$ について

$-1<-\dfrac{1}{2a}<1$ すなわち $-1<\dfrac{1}{2a}<1$

これと $a>0$ より，$0<\dfrac{1}{2a}<1$ $\quad\therefore a>\dfrac{1}{2}$ $\quad$ ・・・⑤

$f\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=-a-\dfrac{1}{4a}-b$ について

$-a-\dfrac{1}{4a}-b<0$ $\quad\therefore b>-a-\dfrac{1}{4a}$ $\quad$ ・・・⑥

$f(1)=1-b$ および $f(-1)=-1-b$ について

$1-b>0$ かつ $-1-b>0$ より，$b<-1$ ・・・⑦

よって，⑤かつ⑥かつ⑦より，$a>\dfrac{1}{2}$ かつ $-a-\dfrac{1}{4a}<b<-1$

解法 2

共有点を P，OP が x 軸正方向となす角を $\theta\ (0\leq\theta<2\pi)$ とすると，

P は $x^2+y^2=1$ 上の点だから，P の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せる。

これと，点 P は放物線 $y=ax^2+b$ 上の点でもあることから，$\sin\theta=a\cos^2\theta+b$

よって，$-a\cos^2\theta+\sin\theta+b=-a(1-\sin^2\theta)+\sin\theta+b=a\sin^2\theta+\sin\theta-a-b$ より，

$a\sin^2\theta+\sin\theta-a-b=0\ (0\leq\theta<2\pi)$

よって，$t=\sin\theta$ とおき，$f(t)=at^2+t-a-b$ とすると，$-1\leq t\leq 1$ より，

円と放物線が共有点をもつための必要十分条件は $f(t)=0$ の解が $-1\leq t\leq 1$ の範囲に存在することである。

また，$t=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ の 1 つ，$t=-1$ のとき $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ の 1 つ，

$-1<t<1$ においては，ある 1 つの t の値に対し 2 つの θ の値が存在する。

したがって，$m=2$ となるのは，

$f(t)=0$ の解が $t=\pm1$，$-1<t<1$ において重解をもつ，$f(1)\cdot f(-1)<0$ の 3 つの場合がある。

以下の解き方は解法 1 と同じ

192

(1)

$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ とすると，それぞれを接点とする接線の方程式は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$

いずれの接線も $\left(t,\ \dfrac{t^2}{8}-2\right)$ を通るから，$x_1t+y_1\left(\dfrac{t^2}{8}-2\right)=1$，$x_2t+y_2\left(\dfrac{t^2}{8}-2\right)=1$

これは $P_1,\ P_2$ が $tx+\left(\dfrac{t^2}{8}-2\right)y=1$ 上の点であることを示している。

よって，直線 l の方程式は $tx+\left(\dfrac{t^2}{8}-2\right)y=1$

(2)

求める円の中心の座標を $(p,\ q)$，半径を r とすると，点 $(p,\ q)$ と直線 l の距離が r だから，

$$\frac{\left|pt+\left(\dfrac{t^2}{8}-2\right)q-1\right|}{\sqrt{t^2+\left(\dfrac{t^2}{8}-2\right)^2}}=r \text{ より，} \left|qt^2+8pt-16q-8\right|=rt^2+16r$$

よって，$qt^2+8pt-16q-8=rt^2+16r$ または $qt^2+8pt-16q-8=-rt^2-16r$

$qt^2+8pt-16q-8=rt^2+16r$ のとき

等式は t についての恒等式だから，$\begin{cases} q=r \\ 8p=0 \\ -16q-8=16r \end{cases}$ $\therefore p=0,\ q=r=-\dfrac{1}{4}$

これは $r>0$ を満たさない。

よって，不適

$qt^2+8pt-16q-8=-rt^2-16r$ のとき

同様にして，$p=0,\ q=-\dfrac{1}{4},\ r=\dfrac{1}{4}$

よって，直線 l は t の値にかかわらず，中心 $(p,\ q)=\left(0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$，半径 $r=\dfrac{1}{4}$ の円に接する。

ゆえに，求める円の方程式は $x^2+\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$